

DOI: 10.16516/j.gedi.issn2095-8676.2019.04.003

条形浅基础极限承载力的滑移线解

彭明祥

(中国能源建设集团广东省电力设计研究院有限公司, 广州 510663)

摘要: [目的]基于极限平衡理论,提出了一种求解一般条件下条形浅基础极限承载力的精确方法。[方法]地基土被视为服从Mohr-Coulomb屈服准则的理想弹塑性材料,并且假定它是各向同性的、均匀的以及不可压缩或不可膨胀的理想连续介质。通过分析基础与土之间的相对运动和相互作用,将条形浅基础极限承载力问题分为两类问题。建立一个以总竖向极限承载力为目标函数的最小值模型,进而采用滑移线法求解极限承载力而无需事先对塑性区和非塑性楔作任何假定,还提出一种工程上方便实用的简化方法。此外,重点研究了基础两侧均布荷载相同的第一类问题,推导出Terzaghi极限承载力方程的适用条件以及其三个承载力系数的理论精确解,提出一个新承载力方程替代Terzaghi方程,并且通过无量纲分析提出几何力学相似原理。[结果]研究表明:当基础完全光滑时,研究得到的总竖向极限承载力与现有方法得到的结果相当吻合;然而当基础完全粗糙时,现有方法低估了极限承载力。[结论]经典的Prandtl机构并不是无重土地上完全光滑基础极限承载力问题的塑性破坏机构。

关键词: 承载力; 基础与土相互作用; 极限平衡理论; 极小值原理; 浅基础; 滑移线法

中图分类号: TU470

文献标志码: A

文章编号: 2095-8676(2019)04-0013-16

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Slip-line Solution to Ultimate Bearing Capacity of Shallow Strip Footings

PENG Mingxiang

(China Energy Engineering Group Guangdong Electric Power Design Institute Co., Ltd., Guangzhou 510663, China)

Abstract: [Introduction] Based on the limit equilibrium theory, an accurate approach is proposed to solve the ultimate bearing capacity of shallow strip footings under general conditions. [Method] The foundation soil is considered to be an ideal elastic-plastic material, which obeys the Mohr-Coulomb yield criterion, and is assumed to be an ideal continuous medium that is isotropic, homogeneous and incompressible or non-expansive. Through analyzing the relative motion and interaction between the footing and soil, the problem of the ultimate bearing capacity of shallow strip footings is divided into two categories. A minimum model with the total vertical ultimate bearing capacity as its objective function is established to solve the ultimate bearing capacity using the slip-line method with no need to make any assumptions on the plastic zone and non-plastic wedge in advance. A convenient and practical simplified method is also proposed for practical engineering purposes. Furthermore, the first category of the problem in the case of the same uniform surcharges on both sides of footing is the focus of the study; the applicable conditions of Terzaghi's ultimate bearing capacity equation as well as the theoretical exact solutions to its three bearing capacity factors are derived, and a new bearing capacity equation is put forward as a replacement for Terzaghi's equation. The geometric and mechanical similarity principle is proposed by a dimensionless analysis. [Result] The results show that for perfectly smooth footings, the total vertical ultimate bearing capacity obtained by the present method is in good agreement with those by existing methods; whereas for perfectly rough footings, the existing methods underestimate the ultimate bearing capacity. [Conclusion] The classic Prandtl mechanism is not the plastic failure mechanism of the ultimate bearing capacity problem of perfectly smooth footings on weightless soil.

Key words: bearing capacity; footing-soil interaction; limit equilibrium theory; minimum principle; shallow foundation; slip-line method

收稿日期: 2019-10-01 修回日期: 2019-11-20

论文简介: 本文内容已发表在国际期刊(日本)Soils and Foundations 2019, 59(3). (Doi: <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2019.01.008>).

地基极限承载力是土力学极限平衡理论的三大经典课题之一,也是目前研究最多的领域。Prandtl (1920)^[1]针对完全光滑条形基础、中心垂直荷载以及无地面荷载的情况,利用极限平衡理论首先研究

了无重土地基极限承载力问题,求得基底极限压力处处相等,其闭合形式解如下:

$$q_{uv} = cN_c \quad (1)$$

式中: c 为土黏聚力; N_c 为黏聚力的承载力系数,可按本文给出的式(27)计算。后来, Reissner (1924)^[2] 将 Prandtl (1920)^[1] 的研究推广到基础两侧有相同均布荷载的情况,并推导出以下 Prandtl-Reissner 解:

$$q_{uv} = cN_c + qN_q \quad (2)$$

式中: q 为基础两侧的均布荷载; N_q 为均布荷载的承载力系数。 N_c 和 N_q 仍由式(27)确定。

然而,如若考虑土自重和基础粗糙度,则问题会复杂得多。Terzaghi (1943)^[3] 针对完全粗糙条形浅基础和基础两侧均布荷载相同的情况,假定基础下方的非塑性楔为等腰三角形以及滑裂面为对数螺旋线与直线的复合曲线,使用叠加原理和极限平衡法推导了考虑土重影响的地基极限承载力方程,也就是著名的 Terzaghi 方程:

$$\frac{Q_{uv}}{B} = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma BN_\gamma \quad (3)$$

式中: Q_{uv} 为总竖向极限承载力; B 为基础宽度; γ 为土重度; N_γ 为关于土重度贡献的承载力系数。 N_c 、 N_q 及 N_γ 纯依赖土内摩擦角 φ , 其中 N_c 、 N_q 值由式(29)计算,而 N_γ 可通过查图表方式求得。

近70多年来,应用 Terzaghi 方程对各种地基极限承载力问题进行了大量的理论研究,计算方法包括极限平衡法^[4-13]、滑移线法^[14-23]、极限分析法^[24-29]、数值极限分析法^[30-33]以及有限元和有限差分法^[34-39]。一般认为滑移线法可以预测到一个较好的正确解^[24]。Sokolovskii (1965)^[14] 采用滑移线法研究了地基稳定性、斜坡稳定性以及挡土墙土压力等各种极限平衡问题,并试图给出求解滑移线场数值解的一般性方法,但他的方法一般仅适用于无粘性土的情况。Bolton 和 Lau (1993)^[16] 采用滑移线法研究了条形和圆形基础的地基承载力问题,分析了光滑和完全粗糙基础对承载力系数的影响。Kumar 和 Mohan Rao (2002)^[19] 使用滑移线法分析了水平地震力对条形基础极限承载力的影响,但他们未能考虑基础与土界面的固有摩擦特性,而简单地假定基底处处的剪应力与正应力之比等于水平地震系数。Martin (2004)^[22] 基于滑移线法开发了一个计算条形和圆形基础极限承载力的软件 ABC,可考

虑土黏聚力 c 随深度线性变化的影响,但该程序仅适用于基础两侧均布荷载相同的光滑和完全粗糙基础的情况。Cheng 和 Au (2005)^[21] 利用滑移线法和单侧破坏机构研究了斜坡光滑条形基础的极限承载力问题。针对无黏性粒状土的情况,一些研究者 (Ueno 等, 2001^[17]; Zhu 等, 2001^[18]; Lau 和 Bolton, 2011^[23,40]) 考虑土的应力相关内摩擦角 φ 对极限承载力的影响,采用滑移线法近似求解条形和圆形基础的极限承载力,并且进行了试验验证。然而,内摩擦角随平均应力变化使得极限平衡问题的数学求解更加复杂和困难,而且至今尚未严格推导出可变 φ 的控制方程。

目前关于条形浅基础极限承载力方面的研究已取得了很大进展,但至今仍未见到一个较为完整的理论解,而如何精确评估 N_γ 这个众所周知的问题也一直得不到很好解决。笔者认为,原因在于对以下几方面问题缺乏认识:

1) 关于极限平衡问题的真解。Chen (1975)^[24] 作过这样的评论:“滑移线解不一定是真解。如果利用关联流动法则,并对所得的应力-应变率方程求积分,从而得到一个运动许可速度场,那么滑移线解就是一个上限解;另外,如果滑移线应力场可以扩延至土体的整个半空间,且平衡方程、应力边界条件和屈服条件均能满足,那么滑移线解又是一个下限解,因而也是真解。”目前许多文献 (Frydman 和 Burd, 1997^[36]; Michalowski, 1997^[25]; Martin, 2004^[22] 和 2005^[41]; Hjiatj 等, 2005^[32]) 还是引用这个观点。但是,随着采用滑移线法成功求解在一般情况下挡土墙极限土压力 (彭明祥, 2011^[42] 和 2019^[43]; Peng 和 Chen, 2013^[44]), 有理由相信滑移线解就是极限平衡问题理论上的真解。

2) 关于基底的应力边界条件。确定该边界条件的困难在于仍不清楚基础与土之间的相对运动和相互作用 (Bolton 和 Lau, 1993^[16])。

3) 关于基底下方的非塑性楔。目前这方面的研究并不多,至今尚不清楚理论上非塑性楔是如何形成的,也不清楚非塑性楔存在与否的条件。

4) 关于 Terzaghi (1943)^[3] 极限承载力方程。目前几乎所有的研究都离不开 Terzaghi 方程,然而,关于这个方程本质方面的问题还有待进一步研究。例如, Terzaghi 方程只是一个基于叠加假定、保守的近似方程 (Davis 和 Booker, 1971^[15]; Griffiths, 1982^[34]; Bo-

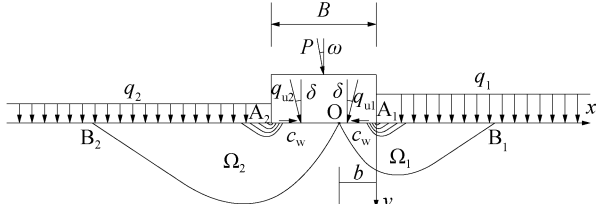
lton 和 Lau, 1993^[16]; Zhu 等, 2003^[9]), 还是一个精确的理论方程? 它的严格适用条件是什么? 它的三个承载力系数与哪些基本参数有关? 以及能否求得这些承载力系数的理论精确解?

本文基于极限平衡理论, 首先通过分析基础与土之间的相对运动和相互作用, 将条形浅基础极限承载力问题分为两类问题; 其次建立一个采用滑移线法求解一般情况下极限承载力的最小值模型, 而无需事先对塑性区和非塑性楔作任何假定; 最后, 研究基础两侧均布荷载相同的第一类问题, 给出 Terzaghi 方程的适用条件及其三个承载力系数的理论精确解, 提出一个新承载力方程替代 Terzaghi 方程, 而且通过无量纲分析还提出几何力学相似原理, 该原理有望为地基承载力试验研究提供理论指导。

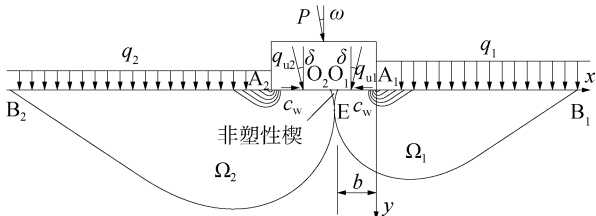
1 计算模型与求解

1.1 基本假定

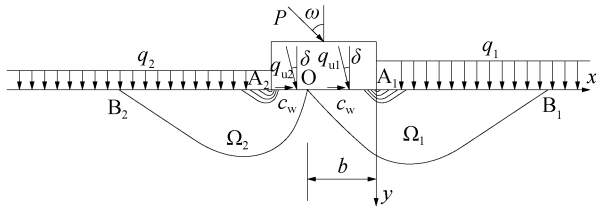
条形浅基础极限承载力的计算模型如图 1 所示。设刚性基础与土之间的黏结力和摩擦角分别为 c_w 和 δ ; 基础中心作用一个由上部结构传来的线荷载 P , 且荷载 P 的倾角为 ω ; 基础两侧地面分别作用均布荷载 q_1 和 q_2 。基本假定如下:



(a) 无非塑性楔的第一类问题



(b) 有非塑性楔的第一类问题



(c) 第二类问题

图 1 计算模型

Fig. 1 Calculation models

1) 该问题为平面应变问题。

2) 地基土为服从 Mohr-Coulomb 屈服准则的理想弹塑性材料, 并且是各向同性的、均匀的以及不可压缩或不可膨胀的理想连续介质, 由三个常参数 γ 、 c 和 φ 表征。

3) 刚性基础与土之间的界面满足库仑摩擦定律, 由两个常参数 c_w 和 δ 表征。

4) 不考虑基底水平面以上土抗剪强度以及基础侧面阻力的影响, 基底以上土体分别用均布荷载 q_1 和 q_2 代替。

1.2 两类问题

根据基础在上部荷载 P 作用下是否沿着基础与土界面发生水平滑动, 可将条形浅基础极限承载力问题分为以下两类。

1.2.1 第一类问题

如图 1(a) 所示, 荷载 P 的水平分力较小, 基础沿基础与土界面不会产生 $+x$ 方向的水平滑动。当基础加载时, 基础两侧边缘 A_1 和 A_2 附近的土体一般最先进入塑性流动状态而形成两个局部塑性区 Ω_1 和 Ω_2 , 随着荷载不断增加, 塑性区不断扩展并最终相交于点 O 。第一类问题的特点是基础无水平运动而塑性土被迫向基础两侧挤出, 也就是“土动而基础不动”, 以及基础对土的摩擦力总是阻碍土的塑性流动。可以推断, 基础与塑性流动土之间总是存在着相互作用力, 而塑性流动土对基底所产生的竖向压力之总和就是地基的总竖向极限承载力 Q_{uv} 。一般地, 设作用于基底 OA_1 、 OA_2 的极限承载力分别为 q_{u1} 和 q_{u2} , 相应的竖向极限承载力分别为 q_{uv1} 和 q_{uv2} , 则有:

$$Q_{uv} = \int_{-b}^0 q_{uv2} dx + \int_0^b q_{uv1} dx = \left(\int_{-b}^0 q_{u2} dx + \int_0^b q_{u1} dx \right) \cos^2 \delta \quad (4)$$

式中: b 为基底 OA_1 的宽度。

然而, 在一些情况下, 塑性区 Ω_1 和 Ω_2 相切于基底下方的点 E 而形成非塑性楔 O_1EO_2 , 如图 1(b) 所示。假设非塑性楔与基础为一个整体, 构成一个可称为“楔形基础”的新基础, 则可得到 Q_{uv} 为:

$$Q_{uv} = \int_{-b}^{-t} q_{uv2} dx + \int_{-t}^0 q_{uv1} dx - V_1 - V_2 \quad (5)$$

式中: V_1 、 V_2 分别为塑性流动土作用于非塑性楔侧面 O_1E 和 O_2E 的垂直向下的拉力; t 为楔底 O_1O_2

的宽度。如 $t=0$ ，则 $V_1 = V_2 = 0$ ，且式(5)退化为式(4)。

1.2.2 第二类问题

如图1(c)所示，荷载 P 的水平分力较大，基础沿基础与土界面产生 $+x$ 方向的水平滑动。例如，地震作用下的条形基础 (Sarma 和 Iossifelis, 1990^[5]; Soubra, 1999^[26]; Kumar 和 Mohan Rao, 2002^[19]; Choudhury 和 Subba Rao, 2005^[10])、重力式挡水坝以及刚性挡土墙等的地基极限承载力问题大多数属于这种情况。第二类问题的特点是“基础先土而动”，以及土对基础的摩擦力总是阻碍基础的水平运动。但是，基础对土的摩擦力所起的作用却不同：对于基底 OA_1 ，摩擦力方向与土塑性流动方向相同，因而摩擦力加速土的塑性流动；对于基底 OA_2 ，摩擦力方向与土塑性流动方向相反，因而摩擦力阻碍土的塑性流动。第二类问题的塑性区渐进形成过程与第一类问题的相类似，总竖向极限承载力 Q_{uv} 按式(4)计算，而总水平极限承载力 Q_{uh} 按下式计算：

$$\begin{aligned} Q_{uh} &= c_w B + \left(\int_{-B}^{-b} q_{uv2} dx + \int_{-b}^0 q_{uv1} dx \right) \tan \delta \\ &= c_w B + \left(\int_{-B}^{-b} q_{u2} dx + \int_{-b}^0 q_{u1} dx \right) \sin \delta \cos \delta \end{aligned} \quad (6)$$

联立式(4)和式(6)，可以得到以下关系式：

$$Q_{uh} = c_w B + Q_{uv} \tan \delta \quad (7)$$

式中： Q_{uh} 和 Q_{uv} 满足线性关系。一旦求解 Q_{uv} ，则 Q_{uh} 可按上式计算。

对于实际工程应用，选择按第一类问题还是第二类问题进行地基极限承载力计算，完全取决于上部荷载 P 的大小和倾角、基础宽度 B 以及界面摩擦特性 c_w 和 δ 。可以导出，当以下条件满足时基础沿基础与土界面不会产生 $+x$ 方向水平滑动：

$$P \sin(\delta - \omega) + c_w B \cos \delta > 0 \quad (8)$$

当式(8)条件满足时，按第一类问题考虑；否则，应按第二类问题考虑。对于完全光滑基础的情况，即当 $c_w = 0$ ， $\delta = 0$ 时，第一类和第二类问题的计算结果完全一致。如若基础荷载 P 为偏心荷载，且它的偏心距为 e ，则基础宽度应取有效宽度 $B' = B - 2e$ (Meyerhof, 1953^[45])。注意：除非另有说明，本文中的基础荷载均假定为一个中心荷载。

1.3 求解方法

由式(4)或式(5)可知，在其它参数不变的情况下， Q_{uv} 是一个关于 b 的函数，取不同的 b 值得到不同的 Q_{uv} 值，而其中最小值 $Q_{uv}(b^*)$ 就是所欲求的总竖向极限承载力。该优化问题的数学模型如下：

$$\begin{aligned} b^* : Q_{uv}(b^*) &= \text{Minimize } Q_{uv}(b) \\ \text{Subject to } & 0 \leq b \leq B \end{aligned} \quad (9)$$

式中： b^* 和 $Q_{uv}(b^*)$ 为问题的最优解。

该问题可采用一维搜索方法如分数法、黄金分割法以及抛物线法等求解。为了计算一个目标函数值 $Q_{uv}(b)$ ，需事先求解两个滑移线应力场 Ω_1 和 Ω_2 ，它们的求解方法是相同的，可归结为求解图2所示的基本边值问题。

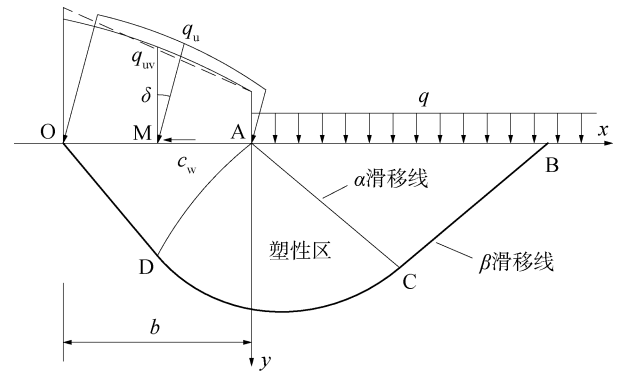


图2 基本边值问题

Fig. 2 Basic boundary value problem

对于第一类问题，其计算步骤如下：

- 1) 赋给 b 一个值并且令 $q = q_1$ ，求解基本边值问题得到滑移线应力场 Ω_1 。
- 2) 通过迭代计算确定 t 值；如非塑性楔不存在，则 $t=0$ 。
- 3) 用 $B - b - t$ 替代 b 以及令 $q = q_2$ ，再次求解基本边值问题，并作关于 $x = -B/2$ 轴的镜像变换即可得到滑移线应力场 Ω_2 。
- 4) 目标函数值 $Q_{uv}(b)$ 按式(5)计算。特别地，当 $t=0$ 时， $Q_{uv}(b)$ 可直接按式(4)计算。

对于第二类问题，同理可确定 $Q_{uv}(b)$ 值。不同的是在求解 Ω_1 时，由于基础对土的摩擦力方向总是与土塑性流动方向相同，因此 c_w 和 δ 应取负值；另外， t 值保持为零。

2 基本边值问题

如图2所示,基本边值问题可看作挡土墙被动土压力问题的一个特例,即相当于墙背倾角为 π 、墙高为0、墙土接触面长度为 b 以及地面水平的情况。该极限平衡问题可采用滑移线法求解,其基本方程、边界条件、有限差分法以及无量纲分析等同彭明祥(2011)^[42]的研究,故在此不作赘述。所求得的滑移线应力场一般由主动区 ADO、辐射剪切区 ACD 以及被动区 ABC 三部分组成。

基本边值问题的规格化滑移线应力场取决于参数 φ 、 δ 、 η_1 及 η_2 ,其中无量纲参数 η_1 和 η_2 由下式定义:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{c + q \tan \varphi}{\gamma b} \\ \eta_2 &= \frac{c_w + q \tan \delta}{\gamma b}\end{aligned}\quad (10)$$

一旦求解了规格化滑移线应力场,则基底 OA 上任意点 M 的极限承载力可由下式确定:

$$\begin{aligned}q_u &= \frac{\gamma b N_{vm} + q}{\cos^2 \delta} \\ q_{uv} &= \gamma b N_{vm} + q\end{aligned}\quad (11)$$

式中: N_{vm} 为点 M 的规格化竖向极限承载力或称竖向承载力系数,可按下式计算:

$$N_{vm} = p'_M - R'_w \sin \delta + \cos \delta \sqrt{R_M'^2 - R_w'^2} \quad (12)$$

式中: p'_M 为点 M 的规格化平均应力; R'_M 、 R'_w 为点 M 处的规格化应力圆半径,也就是, $R'_M = p'_M \sin \varphi + \eta_1 \cos \varphi$, $R'_w = p'_M \sin \delta + \eta_2 \cos \delta$ 。

一般而言,竖向极限承载力 q_{uv} 沿基底 OA 呈非线性分布,但为了方便起见,工程上通常基于总承载力相等原理假定为线性分布(见图2中的虚线),这样只需确定点 A、O 的竖向极限承载力即可。设点 A、O 的竖向极限承载力分别为 $q_{uv}(0)$ 和 $q_{uv}(-b)$,则有:

$$\begin{aligned}q_{uv}(0) &= \gamma b N_{v0} + q \\ q_{uv}(-b) &= \gamma b N_{v1} + q\end{aligned}\quad (13)$$

式中: N_{v0} 、 N_{v1} 分别代表点 A、O 的竖向承载力系数,与参数 φ 、 δ 、 η_1 及 η_2 有关。为了便于工程应用,笔者已编制了一些常用 φ 、 δ 值的 N_{v0} 和 N_{v1} 表格,以 PDF 格式可无偿提供给读者使用。其中土内摩擦角 φ 包括 5° 、 10° 、 15° 、 20° 、 25° 、 30° 、 35° 、 40° 、 45° 、 50° 和 55° ;对于每一个 φ 值, δ 值分别

选取 0 、 $\varphi/4$ 、 $\varphi/3$ 、 $\varphi/2$ 、 $2\varphi/3$ 、 $3\varphi/4$ 和 φ 。因此,根据 φ 、 δ 、 η_1 及 η_2/η_1 通过查表和使用线性插值即可确定相应的 N_{v0} 和 N_{v1} 值。表1给出几种不同 φ 、 δ 值的 N_{v0} 和 N_{v1} 。

如表1所示,笔者发现并证明了一个很有用的关系式,也就是 $N_{v0} = \eta_1 f(\varphi, \delta, \eta_2/\eta_1)$ 。但是,在一般条件下函数 f 并无显性表达式,只有当后面的式(15)或式(22)满足时,才恒有 $f = N_c$,式中 N_c 由式(24)确定。还注意到 N_{v0} 一般通过简单的迭代计算即可求得,而 N_{v1} 则必须待滑移线应力场求解后方可确定。

3 塑性破坏

3.1 塑性区

当基础不断加载时,地基会逐渐进入塑性破坏状态。塑性区的形状和大小完全取决于该问题的类型和相关参数,可通过求解前面给出的最优化问题自动确定,而无需事先作任何假定。例如第一类问题,参数 $B = 1 \text{ m}$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $c = 10 \text{ kPa}$, $\varphi = 25^\circ$, $c_w = 5 \text{ kPa}$ 以及 $\delta = 10^\circ$ 。如果保持 $q_2 = 30 \text{ kPa}$ 不变而只改变 q_1 ,则地基会发生不同的塑性破坏。当 $q_1 \leq 3.781 \text{ kPa}$ 时,地基发生右侧塑性破坏,总竖向极限承载力 Q_{uv} 随着 q_1 的增大而增大,如图3(a)所示。当 $3.781 \text{ kPa} < q_1 < 58.723 \text{ kPa}$ 时,地基发生双侧塑性破坏, Q_{uv} 随着 q_1 的增大而增大,如图3(b)和3(c)所示。当 $q_1 \geq 58.723 \text{ kPa}$ 时,地基发生左侧塑性破坏, Q_{uv} 不再随着 q_1 的变化而变化,如图3(d)所示。

此外,还给出几种特殊情况的地基塑性破坏,分别如下:

情况1:纯黏性土 $\delta = \varphi = 0$ 的第一类问题, q_{uv} 沿基底处处相等。当 $q_1 < q_2$ 时,可求得最优解 $b^* = B$,即地基发生右侧塑性破坏。当 $q_1 > q_2$ 时,可得 $b^* = 0$,地基发生左侧塑性破坏。当 $q_1 = q_2$ 时,最优化问题有无数解,即 $b^* \in [0, B]$,地基塑性破坏具有不确定性。

情况2:纯黏性土 $\delta = \varphi = 0$ 的第二类问题, q_{uv} 沿基底处处相等。如 q_2 一定,则总存在一个 q_1 的临界值 q_{1cr} ,也就是 $q_{1cr} = q_2 + 2c \sin^{-1}(c_w/c)$ 。当 $q_1 < q_{1cr}$ 时,可得 $b^* = B$,地基发生右侧塑性破坏。当 $q_1 > q_{1cr}$ 时,可得 $b^* = 0$,地基发生左侧塑性破

表 1 竖向承载力系数 N_{v0} 和 N_{v1}

Tab. 1 Vertical bearing capacity factors N_{v0} and N_{v1}

工况 η_2/η_1	$\varphi = 25^\circ, \delta = -10^\circ$						$\varphi = 25^\circ, \delta = 10^\circ$					
	-1		-0.5		0		0		0.5		1	
	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}
0.0	0	3.422 9	0	3.422 9	0	3.422 9	0	11.330	0	11.330	0	11.330
0.2	2.551 7	7.442 1	2.798 1	7.945 1	3.013 3	8.407 9	5.225 5	21.239	5.327 4	21.515	5.422 3	21.784
0.4	5.103 5	10.365	5.5962	11.187	6.026 6	11.936	10.451	27.988	10.655	28.426	10.845	28.851
0.6	7.655 2	13.117	8.3943	14.228	9.0399	15.234	15.676	34.131	15.982	34.711	16.267	35.270
0.8	10.207	15.797	11.192	17.183	12.053	18.433	20.902	39.992	21.309	40.703	21.689	41.385
1.0	12.759	18.439	13.991	20.093	15.067	21.579	26.127	45.692	26.637	46.527	27.111	47.327
1.2	15.310	21.059	16.789	22.975	18.080	24.693	31.353	51.288	31.964	52.243	32.534	53.156
1.4	17.862	23.663	19.587	25.839	21.093	27.785	36.578	56.813	37.292	57.884	37.956	58.907
1.6	20.414	26.256	22.385	28.689	24.106	30.861	41.804	62.286	42.619	63.471	43.378	64.602
1.8	22.966	28.843	25.183	31.531	27.120	33.927	47.029	67.720	47.946	69.018	48.800	70.254
2.0	25.517	31.423	27.981	34.365	30.133	36.984	52.255	73.123	53.274	74.533	54.223	75.873
2.2	28.069	33.999	30.779	37.194	33.146	40.034	57.480	78.503	58.601	80.023	59.645	81.466
2.4	30.621	36.572	33.577	40.019	36.160	43.080	62.706	83.864	63.928	85.493	65.067	87.039
2.6	33.173	39.142	36.375	42.840	39.173	46.121	67.931	89.208	69.256	90.946	70.489	92.593
工况 η_2/η_1	$\varphi = 30^\circ, \delta = 0$						$\varphi = 30^\circ, \delta = 0$					
	-1		-0.5		0		0		0.5		1	
	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}
0.0	0	15.311	0	15.311	0	15.311	0	15.311	0	15.311	0	15.311
0.2	5.660 7	26.100	5.849 8	26.553	6.027 9	26.993	6.027 9	26.993	6.196 6	27.422	6.357 0	27.841
0.4	11.321	33.481	11.700	34.216	12.056	34.928	12.056	34.928	12.393	35.619	12.714	36.291
0.6	16.982	40.186	17.549	41.169	18.084	42.119	18.084	42.119	18.590	43.039	19.071	43.931
0.8	22.643	46.573	23.399	47.789	24.112	48.961	24.112	48.961	24.787	50.094	25.428	51.190
1.0	28.304	52.776	29.249	54.216	30.140	55.601	30.140	55.601	30.983	56.936	31.785	58.227
1.2	33.964	58.862	35.099	60.518	36.168	62.109	36.168	62.109	37.180	63.640	38.142	65.120
1.4	39.625	64.866	40.949	66.734	42.195	68.526	42.195	68.526	43.376	70.249	44.499	71.912
1.6	45.286	70.811	46.798	72.887	48.223	74.877	48.223	74.877	49.573	76.789	50.856	78.631
1.8	50.947	76.711	52.648	78.994	54.251	81.178	54.251	81.178	55.770	83.275	57.213	85.295
2.0	56.607	82.577	58.498	85.063	60.279	87.440	60.279	87.440	61.966	89.721	63.570	91.916
2.2	62.268	88.416	64.348	91.103	66.307	93.671	66.307	93.671	68.163	96.134	69.927	98.502
2.4	67.929	94.232	70.197	97.120	72.335	99.877	72.335	99.877	74.360	102.52	76.284	105.06
2.6	73.590	100.03	76.047	103.12	78.363	106.06	78.363	106.06	80.556	108.89	82.641	111.60
工况 η_2/η_1	$\varphi = 30^\circ, \delta = -30^\circ$						$\varphi = 30^\circ, \delta = 30^\circ$					
	-1		-0.5		0		0		0.5		1	
	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}	N_{v0}	N_{v1}
0.0	0	0.4330	0	0.433 0	0	0.433 0	0	36.165	0	36.165	0	36.165
0.2	0.604 8	1.037 8	1.257 7	2.278 1	1.568 9	2.883 7	10.317	51.659	10.328	51.632	10.333	51.607
0.4	1.209 5	1.642 5	2.515 4	3.623 5	3.137 9	4.598 2	20.634	60.705	20.655	60.612	20.666	60.531
0.6	1.814 3	2.247 3	3.773 1	4.923 6	4.706 8	6.240 1	30.950	67.957	30.983	67.790	30.999	67.738
0.8	2.419 1	2.852 1	5.030 8	6.206 8	6.275 8	7.853 9	41.267	74.284	41.310	74.242	41.333	74.220
1.0	3.023 8	3.456 8	6.288 5	7.481 6	7.844 7	9.453 4	51.584	80.353	51.638	80.300	51.666	80.273
1.2	3.628 6	4.061 6	7.546 2	8.751 6	9.413 7	11.045	61.901	86.135	61.965	86.071	61.999	86.038
1.4	4.233 3	4.666 4	8.803 9	10.019	10.983	12.631	72.218	91.710	72.293	91.635	72.332	91.596
1.6	4.838 1	5.271 1	10.062	11.284	12.552	14.213	82.534	97.130	82.621	97.045	82.665	97.000
1.8	5.442 9	5.875 9	11.319	12.547	14.120	15.793	92.851	102.43	92.948	102.34	92.998	102.29
2.0	6.047 6	6.480 7	12.577	13.810	15.689	17.371	103.17	107.64	103.28	107.53	103.33	107.48
2.2	6.652 4	7.085 4	13.835	15.071	17.258	18.947	113.48	112.77	113.60	112.65	113.66	112.59
2.4	7.257 2	7.690 2	15.092	16.332	18.827	20.523	123.80	117.83	123.93	117.70	124.00	117.64
2.6	7.861 9	8.294 9	16.350	17.593	20.396	22.097	134.12	122.84	134.26	122.70	134.33	122.63

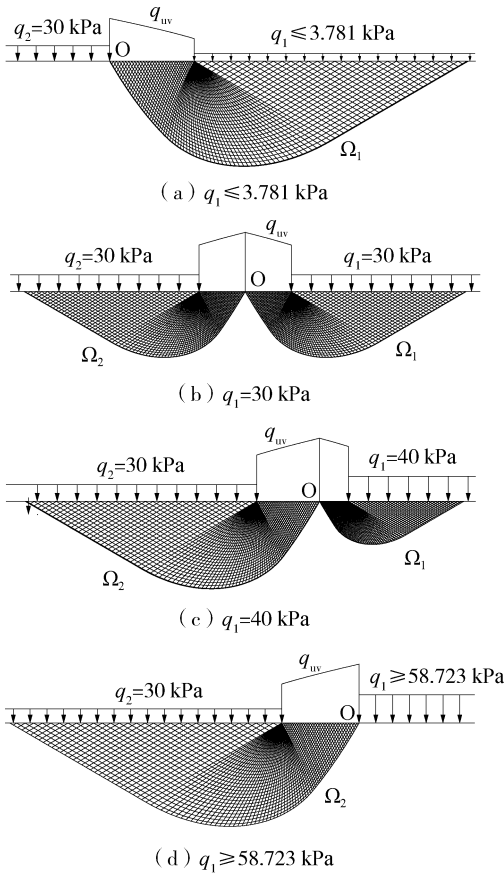


图3 地基塑性破坏随 q_1 变化

Fig. 3. Variation of plastic failures with q_1

坏。当 $q_1 = q_{1cr}$ 时，可得 $b^* \in [0, B]$ ，地基塑性破坏具有不确定性。

情况3：无重土 $\gamma = 0$ 的第一类问题， q_{uv} 沿基底处处相等。当 $q_1 < q_2$ 时，可得 $b^* = B$ ，地基发生右侧塑性破坏。当 $q_1 > q_2$ 时，可得 $b^* = 0$ ，地基发生左侧塑性破坏。当 $q_1 = q_2$ 时，可得 $b^* \in [0, B]$ ，地基塑性破坏具有不确定性。应当指出，Prandtl (1920)^[1]、Reissner (1924)^[2] 和 Hill (1950)^[46] 最先研究了无重土地基上水平光滑基础的情况，即参数 $\gamma = 0$ ， $c_w = 0$ ， $\delta = 0$ 以及 $q_1 = q_2$ ，并给出了相同的极限荷载，由式(2)表示，但他们却使用了不同的破坏机构。事实上，Hill 机构^[46] 仅仅是一个对应于 $b^* = B/2$ 的塑性破坏。然而，Prandtl 机构^[1,2] 却是错误地将左侧和右侧破坏机构简单地重叠在一起的结果，并不代表该极限平衡问题的塑性破坏。

情况4：无重土 $\gamma = 0$ 的第二类问题， q_{uv} 沿基

底处处相等。如 q_2 值保持不变，则总是可以通过迭代计算确定 q_1 的临界值 q_{1cr} 。当 $q_1 < q_{1cr}$ 时，可得 $b^* = B$ ，地基发生右侧塑性破坏。当 $q_1 > q_{1cr}$ 时，可得 $b^* = 0$ ，地基发生左侧塑性破坏。当 $q_1 = q_{1cr}$ 时，可得 $b^* \in [0, B]$ ，地基塑性破坏具有不确定性。

3.2 非塑性楔

一般认为，对于完全粗糙基础和基础两侧均布荷载相等(即 $c_w = c$ ， $\delta = \varphi$ 及 $q_1 = q_2 = q$)的第一类问题，在基底下会出现一个非塑性楔。但是，关于非塑性楔的形状、大小至今还没有一个统一认识。如图4(a)所示，目前大多数研究通常假定非塑性楔是一个等腰三角形，它的底角为(i) $\psi = \varphi$ (Terzaghi, 1943^[3]; Kumbhojkar, 1993^[6])；(ii) $\psi = \pi/4 + \varphi/2$ (Meyerhof, 1951^[4]; Bolton 和 Lau, 1993^[16], Dewaikar 和 Mohapatra, 2003^[7]; Zhu 等, 2003^[9])；(iii) ψ 对应于最小 N_γ 值 (Zhu, 2000^[27]; Silvestri, 2003^[8])。这些非塑性楔的大小随着 φ 的增大而增大，并且除情况(ii)外，其他情况当 $\varphi = 0$ 时非塑性楔不存在。如图4(b)所示，Kumar(2003)^[20] 假定沿基础与土界面的摩擦角 δ 从基础中心处为0逐渐地增加到基础边缘处为 φ ，提出一个以两条滑移线为边界的曲边非塑性楔，每条滑移线在基础边缘处与基底相切，并且与基础中心

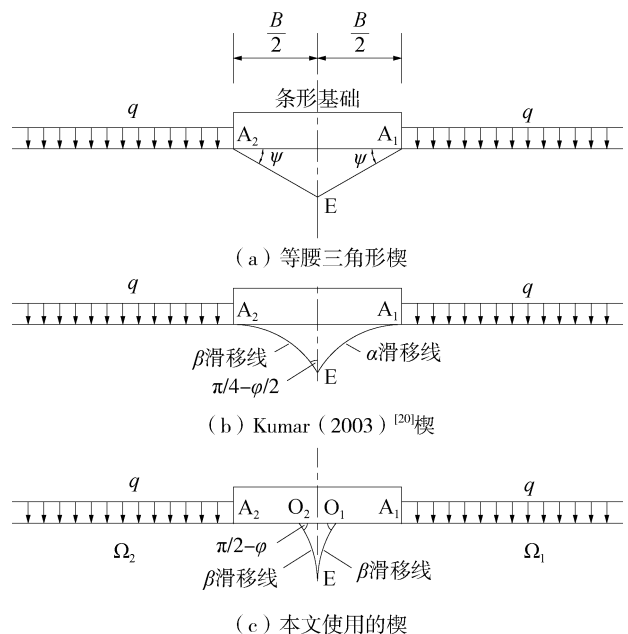


图4 完全粗糙基础的非塑性楔

Fig. 4 Non-plastic wedges for perfectly rough footing

线的倾角为 $\pi/4 - \varphi/2$ 。然而,他认为非塑性楔的一条曲边为 α 滑移线而另一条为 β 滑移线。还有一些研究者 (Davis 和 Booker, 1971^[15]; Martin, 2004^[22] 和 2005^[41]) 采用以两条 α 滑移线为边界的非塑性楔。

以上非塑性楔有一个共同点,就是基底全宽以下的土体处于非塑性状态,但是,这与极限平衡理论所预示的结果不相符。可以证明,当基础不断加载时,除了基础中心附近的土体可能仍处于弹性状态外,其它地方的土体总是可以从弹性状态逐渐变为塑性状态。有限元和有限差分法 (Frydman 和 Burd, 1997^[36]; Yin 等, 2001^[37]; Loukidis 和 Salgado, 2009^[38]) 的数值计算结果也验证了这点。本文首次提出用于完全粗糙基础的非塑性楔如图 4 (c) 所示,它是一个由塑性区 Ω_1 和 Ω_2 相切于基底下方的点 E 而形成的等腰曲边三角形 O_1EO_2 , 两条曲边均为 β 滑移线,并且在基底处的水平倾角为 $\pi/2 - \varphi$ 。非塑性楔的大小随着 φ 的增大而增大,当 $\varphi = 0$ 时,非塑性楔不存在。

对于一般情况下的第一类极限承载力问题,当地基发生单侧塑性破坏时,非塑性楔不存在;当地基发生双侧塑性破坏时,不存在非塑性楔的充要条件是:

$$\chi = \varphi + \delta + \frac{1}{2} \left[\sin^{-1} \left(\frac{R'_{w1}}{R'_{M1}} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{R'_{w2}}{R'_{M2}} \right) \right] \leq \frac{\pi}{2} \quad (14)$$

式中: R'_{M1} 、 R'_{w1} 、 R'_{M2} 及 R'_{w2} 代表图 1(a) 点 O 的规格化应力圆半径。特别地,如参数 φ 、 δ 、 c 及 c_w 满足以下方程:

$$c_w \tan \varphi = c \tan \delta \quad (15)$$

则式(14)可简化为

$$\chi = \varphi + \delta + \sin^{-1} \left(\frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \right) \leq \frac{\pi}{2} \quad (\varphi > 0)$$

$$\chi = \sin^{-1} \left(\frac{c_w}{c} \right) \leq \frac{\pi}{2} \quad (\delta = \varphi = 0) \quad (16)$$

无黏性土不同 δ 值的地基塑性破坏如图 5 所示,参数 $B = 2 \text{ m}$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $c_w = c = 0$, $\varphi = 30^\circ$, $q_1 = 20 \text{ kPa}$ 以及 $q_2 = 10 \text{ kPa}$ 。式(15)总是满足,当 $\delta \leq 19.1066^\circ$ 时,式(16)满足,塑性区 Ω_1 和 Ω_2 相交于基底上点 O 如图 5(a) 和图 5(b) 所示,或相切于点 O 如图 5(c) 所示,因而不存在非塑性楔;当 $\delta > 19.1066^\circ$ 时,式(16)不满足, Ω_1 和 Ω_2

相切于基底下方的点 E, 存在非塑性楔 O_1EO_2 , 如图 5 (d) 和 5 (e) 所示。笔者还注意到, Kumar (2004)^[29] 通过上限极限分析给出类似以上的结果,即对于一个给定 φ 值,总存在一个相应的 δ_R 值,当 $\delta \leq \delta_R$ 时不存在非塑性楔。可是,当 $\delta > \delta_R$ 时,他却得出基底可假定为完全粗糙的结论。

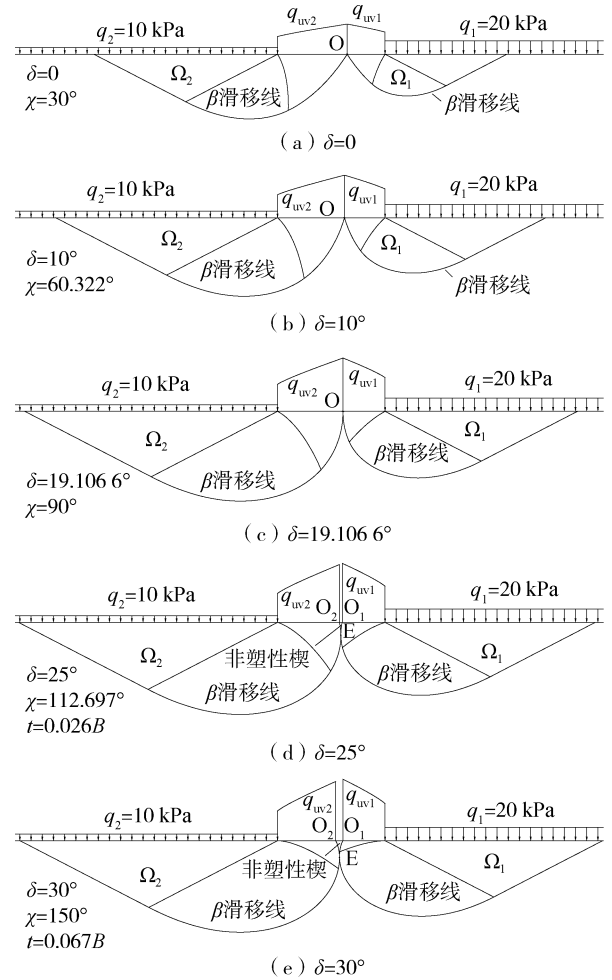


图 5 $\varphi = 30^\circ$ 无黏性土的地基塑性破坏

Fig. 5 Plastic failures of cohesionless soil with $\varphi = 30^\circ$

可以证明,第二类问题在任何情况下都不存在非塑性楔。

4 新承载力方程

现在研究 $q_1 = q_2 = q$ 的第一类极限承载力问题。如图 6 所示,当式(14)满足时,基底下不存在非塑性楔,竖向极限承载力关于基础中心线呈对称连续分布,可推导出总竖向极限承载力如下:

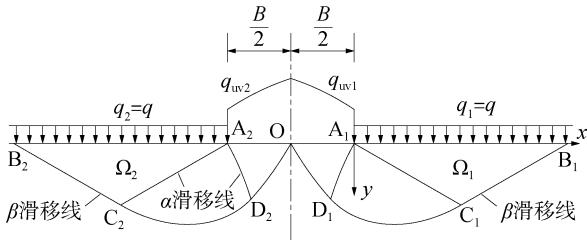


图 6 无非塑性楔的第一类问题

Fig. 6 First category of problem without non-plastic wedge

$$\begin{aligned}
 Q_{uv} &= 2 \times \int_{-\frac{B}{2}}^0 q_{uv1} dx \\
 &= 2 \times \int_{-\frac{B}{2}}^0 (\gamma b N_{vM} + q) dx \\
 &= \frac{1}{2} \gamma B^2 N_v + qB \quad (17)
 \end{aligned}$$

式中： N_v 为平均竖向承载力系数，可由下式确定：

$$N_v = \int_{-1}^0 N_{vM} dx' \quad (18)$$

式中： x' 为规格化坐标 (即 $x' = x/b$, $b = B/2$)； N_v 是关于 φ 、 δ 、 η_1 及 η_2 的函数，并且随着这些参数的增大而增大。而基底平均竖向极限承载力可表示为：

$$\frac{Q_{uv}}{B} = \frac{1}{2} \gamma B N_v + q \quad (19)$$

式(19)就是本文提出的新承载力方程。对于无重土的情况同样适用，只需将前面各式中的 γ 取任意非零值如水重度即可，并且恒有 $N_v = N_{v0}$ 。工程上为了方便起见，通常假定竖向极限承载力沿基底 OA_1 和 OA_2 分别呈线性分布，因而 N_v 可按下式计算：

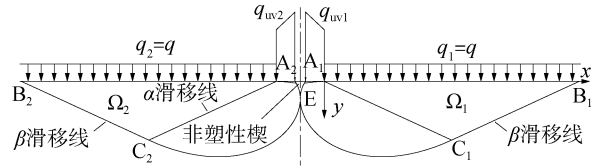
$$N_v = \frac{N_{v1} + N_{v0}}{2} \quad (20)$$

如图 7 所示，当式(14)不满足时，基底下存在一个非塑性楔 O_1EO_2 ，而导致竖向极限承载力沿基底呈不连续分布。由式(5)可得到基底平均竖向极限承载力：

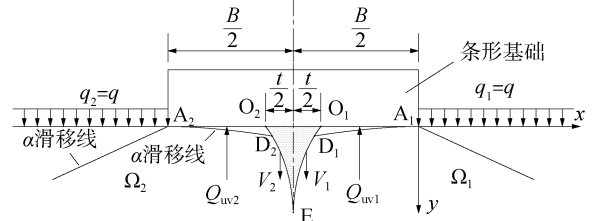
$$\frac{Q_{uv}}{B} = \frac{2}{B} \left(\int_{-\frac{B}{2}}^0 q_{uv1} dx - V_1 \right) \quad (21)$$

式(21)也可采用新承载力方程表示。基于总承载力相等原理，假定竖向极限承载力沿基底呈对称线性连续分布，则其 N_v 仍可由式(20)确定。

根据彭明祥(2011)^[42]的无量纲分析研究，不难导出 $q_1 = q_2 = q$ 、 $\varphi > 0$ 及 $\gamma > 0$ 的第一类问题的几何力学相似原理，可以表达如下：



(a) 塑性破坏



(b) 基础周围放大图

图 7 有非塑性楔的第一类问题

Fig. 7 First category of problem with non-plastic wedge

若两个问题的参数 φ 、 δ 、 η_1 及 η_2 相等，则滑移线场几何相似，相似系数为两者 B 之比；基底平均竖向极限承载力减去 q 后相似，相似系数为两者 γB 之比；总竖向极限承载力减去 qB 后相似，相似系数为两者 γB^2 之比。

从理论上而言，Terzaghi 方程对一般情况并不适用，而仅适用于基底竖向极限承载力呈对称连续分布以及基础边缘竖向极限承载力可分解为 cN_c 与 qN_q 之和的情况。第一个条件意味着基础两侧均布荷载相等和基底以下无非塑性楔，而第二个条件意味着基底上任意点 M 的应力圆半径之比 R'_w/R'_M 与平均应力无关。因此，Terzaghi 方程仅适用于同时满足 $q_1 = q_2 = q$ 、式(14)及式(22)的第一类问题。

$$\lambda = \frac{R'_w}{R'_M} \equiv \text{Constant} \quad (22)$$

式中： λ 间接地反映土抗剪强度沿基底被调动的程度，可称为“基础粗糙度”，有 $0 \leq \lambda \leq 1$ 。如 $\lambda = 0$ ，则 $\delta = 0$ ， $c_w = 0$ ，表示沿基础与土界面的抗剪强度为零即基底完全光滑；如 $\lambda = 1$ ，则 $\delta = \varphi$ ， $c_w = c$ ，表示全部调动了土的抗剪强度即基底完全粗糙。不难证明，当且仅当式(15)满足时，式(22)成立并且可简化为：

$$\lambda \equiv \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \quad (\varphi > 0)$$

$$\lambda \equiv \frac{c_w}{c} \quad (\delta = \varphi = 0) \quad (23)$$

如若式(22)在基底上处处满足，则基础边缘的竖向极限承载力 $q_{uv}(0)$ 或 $q_{uv}(-B)$ 可表达为 $cN_c +$

qN_q , 并且 N_c 、 N_q 的理论精确解为:

$$N_q = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2 \sin^2\varphi}}$$

$$\times \exp\{\lambda \sin^{-1}(\lambda \sin\varphi) + \sin^{-1}\lambda + \pi\} \tan\varphi\}$$

$$N_c = \frac{N_q - 1}{\tan\varphi} \quad (\varphi > 0)$$

$$N_c = \sqrt{1 - \lambda^2} + \sin^{-1}\lambda + \pi + 1 \quad (\delta = \varphi = 0) \quad (24)$$

式中: N_c 和 N_q 与 φ 、 λ 有关, 并随着这些参数的增大而增大。

另一方面, 至今也没有找到一般情况下被一致认可的 N_y 值, 通常是不同的研究者给出不同的结果, 其中有些差别甚至还相当大 (Sieffert 和 Bay-Gress, 2000^[47]; Ukritchon 等, 2003^[31]; Diaz-Segura, 2013^[48]; Motra 等, 2016^[49])。然而, 可以证明 (见附录 1), 对于满足 $q_1 = q_2 = q$ 、式 (14) 及式 (22) 的第一类问题, Terzaghi 方程与新承载力方程总是等价的, 并且 N_y 的理论精确解为:

$$N_y = N_v - N_{v0} = N_v - \eta_1 N_c \quad (25)$$

式中: N_y 是关于 φ 、 δ 、 η_1 及 η_2 的函数, 并且随着这些参数的增大而增大。由此可以推断, N_y 随着 B 的增大而减小 (Griffiths, 1982^[34]; Ueno 等, 2001^[17]), 随着 $c/\gamma B$ 和 $q/\gamma B$ 的增大而增大 (Michalowski, 1997^[25]) 以及随着 $(q + c \cot\varphi)/\gamma B$ 的增大而增大 (Davis 和 Booker, 1971^[15]; Zhu 等, 2003^[9])。很显然, 假定 $c = 0$, $q = 0$ 求解 N_y 值的传统做法是不恰当的。

方程 (25) 给出了长期以来人们一直在寻求的 N_y 理论精确解, 通常可采用数值积分求解。如假设竖向极限承载力沿基底呈对称线性分布, 则 N_y 可按下式计算:

$$N_y = \frac{N_{v1} - N_{v0}}{2} \quad (26)$$

根据前面的分析可进一步推断出, Terzaghi 方程仅适用于同时满足 $q_1 = q_2 = q$ 、式 (15) 及式 (16) 的第一类问题。现分别讨论以下几种特殊情况:

情况 1: 完全光滑基础, 即 $\delta = 0$, $c_w = 0$ 及 $\lambda = 0$ 。式 (15) 和式 (16) 两个条件都满足, 因此 Terzaghi 方程适用, 并且式 (24) 可简化为:

$$N_q = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \exp(\pi \tan\varphi)$$

$$N_c = \frac{N_q - 1}{\tan\varphi} \quad (\varphi > 0)$$

$$N_c = \pi + 2 \quad (\delta = \varphi = 0) \quad (27)$$

情况 2: 完全粗糙基础, 即 $\delta = \varphi$, $c_w = c$ 及 $\lambda = 1$ 。除了 $\delta = \varphi = 0$ 的情况外式 (16) 不满足, 因此 Terzaghi 方程不适用。但由于式 (22) 满足, 式 (24) 可简化为:

$$N_q = (1 + \sin\varphi) \exp\left[\left(\frac{3}{2}\pi + \varphi\right) \tan\varphi\right]$$

$$N_c = \frac{N_q - 1}{\tan\varphi} \quad (\varphi > 0)$$

$$N_c = \frac{3}{2}\pi + 1 \quad (\delta = \varphi = 0) \quad (28)$$

然而, 针对这种完全粗糙基础的情况, Terzaghi (1943)^[3] 假定非塑性楔为图 4(a) 中 $\psi = \varphi$ 的等腰三角形, 推导出 N_c 、 N_q 的解析解如下:

$$N_q = \frac{1}{1 - \sin\varphi} \exp\left[\left(\frac{3}{2}\pi - \varphi\right) \tan\varphi\right]$$

$$N_c = \frac{N_q - 1}{\tan\varphi} \quad (\varphi > 0)$$

$$N_c = \frac{3}{2}\pi + 1 \quad (\delta = \varphi = 0) \quad (29)$$

Terzaghi (1943)^[3] 还假定 $\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$, 所得 N_c 、 N_q 与完全光滑基础的完全一致。

情况 3: 无黏性土, 即 $c_w = c = 0$, $\lambda = \sin\delta/\sin\varphi$ 且 $\varphi > 0$ 。式 (15) 总是满足, 但式 (16) 不总是满足, 因此 Terzaghi 方程不总是适用。

情况 4: 纯黏性土, 即 $\delta = \varphi = 0$, $\lambda = c_w/c$ 且 $c > 0$ 。以上两个条件都满足, 因此 Terzaghi 方程适用, 并且恒有 $N_y = 0$ 和 $N_q = 1$ 。

最后还应指出, 新承载力方程与 Terzaghi 方程相比其优点是显而易见的, 新承载力方程不仅物理意义明确以及适用范围更广, 而且其形式简洁而优美, 因而更有利于理论分析、试验研究以及工程应用。下面给出无黏性土两个特例的计算结果, 并与现有文献的研究成果进行比较。

5 比较

5.1 完全光滑基础 ($\lambda = 0$)

某一条形基础的参数 $B = 1$ m, $\gamma = 20$ kN/m³, $c_w = c = 0$, $\delta = 0$ 及 $q_1 = q_2 = q$, 求解第一类极限承载力问题。Terzaghi 方程适用于该情况, 并且 N_q

按式(27)计算。不同 q 、 φ 值的计算结果如表 2 和图 8 所示，分析比较如下：

当 $q=0$ 时，Martin (2004)^[22] 采用滑移线法计算的 Q_{uv} 和 N_γ 与本文几乎一致。Bolton 和 Lau (1993)^[16] 采用滑移线法计算的结果比本文略高 1.10% ~ 6.51%。但是，所有这些 N_γ 值仅代表 $\delta=0$ 、 $\eta_1=\eta_2=0$ 情况的精确值，并不适用于其它一般情况。Chen(1975)^[24] 采用上限极限分析计算的结果比本文高 55.03% ~ 70.49%。Sokolovskii (1965)^[14] 采用滑移线法计算的结果约等于本文的两倍，原因是他的 N_γ 由单侧破坏机构确定而本文 N_γ 由对称破坏机构确定。还应指出，为了避免出

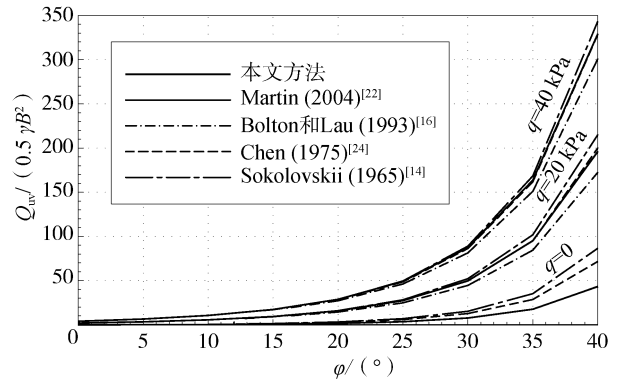


图 8 完全光滑基础的计算结果

Fig. 8 Calculation results for perfectly smooth footings

表 2 完全光滑基础结果比较

Tab. 2 Comparison of results for perfectly smooth footings

$\varphi/$ ($^\circ$)	本文方法			Martin(2004) ^[22]			Bolton 和 Lau(1993) ^[16]			Chen(1975) ^[24]			Sokolovskii(1965) ^[14]		
	N_v	N_γ	Q_{uv}/kN	N_γ	Q_{uv}/kN	Error/ %	N_γ	Q_{uv}/kN	Error/ %	N_γ	Q_{uv}/kN	Error/ %	N_γ	Q_{uv}/kN	Error/ %
$q=0$															
5	0.085	0.085	0.85	0.084	0.84	-0.05	0.09	0.90	6.51	0.131	1.31	55.03	0.17	1.70	101.18
10	0.281	0.281	2.81	0.281	2.81	0.07	0.29	2.90	3.28	0.461	4.61	64.17	0.56	5.60	99.43
15	0.699	0.699	6.99	0.699	6.99	0.03	0.71	7.10	1.60	1.16	11.60	66.00	1.40	14.00	100.34
20	1.578	1.578	15.78	1.579	15.79	0.06	1.60	16.00	1.39	2.68	26.80	69.83	3.16	31.60	100.25
25	3.461	3.461	34.61	3.461	34.61	0.01	3.51	35.10	1.43	5.90	59.00	70.49	6.92	69.20	99.97
30	7.655	7.655	76.55	7.653	76.53	-0.03	7.74	77.40	1.10	12.70	127.00	65.89	15.30	153.00	99.86
35	17.599	17.599	175.99	17.577	175.77	-0.13	17.80	178.00	1.14	28.60	286.00	62.51	35.20	352.00	100.01
40	43.293	43.293	432.93	43.187	431.87	-0.24	44.00	440.00	1.63	71.60	716.00	65.38	86.50	865.00	99.80
$q=20$ kPa															
5	1.346	0.210	33.46	0.210 *	33.46	0.00	0.09	32.25	-3.60	0.131	32.66	-2.38	0.17	33.05	-1.21
10	3.562	0.619	55.62	0.619 *	55.62	0.00	0.29	52.33	-5.92	0.461	54.04	-2.84	0.56	55.03	-1.06
15	7.293	1.411	92.93	1.411 *	92.93	0.00	0.71	85.92	-7.54	1.16	90.42	-2.70	1.40	92.82	-0.12
20	13.767	2.968	157.67	2.968 *	157.67	0.00	1.60	143.99	-8.68	2.68	154.79	-1.83	3.16	159.59	1.22
25	25.462	6.138	274.62	6.138 *	274.62	0.00	3.51	248.34	-9.57	5.90	272.24	-0.87	6.92	282.44	2.85
30	47.723	12.921	497.23	12.921 *	497.23	0.00	7.74	445.42	-10.42	12.70	495.02	-0.44	15.30	521.02	4.78
35	93.059	28.467	950.59	28.467 *	950.59	-0.00	17.80	843.92	-11.22	28.60	951.92	0.14	35.20	1017.92	7.08
40	193.890	67.499	1958.90	67.496 *	1958.86	-0.00	44.00	1723.90	-12.00	71.60	1999.90	2.09	86.50	2148.90	9.70
$q=40$ kPa															
5	2.496	0.225	64.96	0.225 *	64.96	0.00	0.09	63.61	-2.08	0.131	64.02	-1.45	0.17	64.41	-0.85
10	6.545	0.660	105.45	0.660 *	105.45	0.00	0.29	101.76	-3.50	0.461	103.47	-1.88	0.56	104.46	-0.94
15	13.264	1.499	172.64	1.499 *	172.64	0.00	0.71	164.75	-4.57	1.16	169.25	-1.97	1.40	171.65	-0.58
20	24.748	3.151	287.48	3.151 *	287.48	0.00	1.60	271.98	-5.39	2.68	282.78	-1.64	3.16	287.58	0.03
25	45.164	6.515	491.64	6.515 *	491.64	-0.00	3.51	461.58	-6.11	5.90	485.49	-1.25	6.92	495.68	0.82
30	83.336	13.732	873.36	13.732 *	873.36	0.00	7.74	813.44	-6.86	12.70	863.04	-1.18	15.30	889.04	1.80
35	159.508	30.324	1635.08	30.322 *	1635.06	-0.00	17.80	1509.84	-7.66	28.60	1617.84	-1.05	35.20	1683.84	2.98
40	324.929	72.148	3289.29	72.142 *	3289.23	-0.00	44.00	3007.81	-8.56	71.60	3283.81	-0.17	86.50	3432.81	4.36

注：* 表示该 N_γ 值是基于 Terzaghi 方程由软件 ABC 计算的 Q_{uv} 值进行换算得到的。

现任何浮点错误, Ueno 等 (2001)^[17]、Kumar 和 Mohan Rao (2002)^[19]、Kumar (2003)^[20]、Martin (2004)^[22] 和 Martin (2005)^[41] 保持 q 为一个最小可能的有限值, 但本文通过加密应力奇点附近的网格, 无量纲数 $q/\gamma B$ 可取任意小的非零值如 10^{-8} 、 10^{-16} 和 10^{-99} 等。

当 $q = 20$ kPa 时, 采用 Martin (2004)^[22] 软件 ABC 计算的总竖向极限承载力 Q_{uv} 与本文几乎一致。Bolton 和 Lau (1993)^[16] 得到的 Q_{uv} 值比本文低 3.60% ~ 12.00%, 误差随 φ 的增大而增大。Chen (1975)^[24] 得到的 Q_{uv} 与本文较为一致, 最大误差为 2.84%。当 $\varphi \leq 15^\circ$ 时, Sokolovskii (1965)^[14] 得到的 Q_{uv} 比本文略低 0.12% ~ 1.21%, 误差随 φ 的增大而减小; 当 $15^\circ < \varphi \leq 40^\circ$ 时, 比本文高 1.22% ~ 9.70%, 误差随 φ 的增大而增大。

当 $q = 40$ kPa 时, 采用 Martin (2004)^[22] 软件 ABC 计算的总竖向极限承载力 Q_{uv} 与本文几乎一致。Bolton 和 Lau (1993)^[16] 得到的 Q_{uv} 比本文低 2.08% ~ 8.56%, 误差随 φ 的增大而增大。Chen (1975)^[24] 得到的 Q_{uv} 比本文略低 0.17% ~ 1.97%。当 $\varphi \leq 15^\circ$ 时, Sokolovskii (1965)^[14] 得到的 Q_{uv} 比本文略低 0.58% ~ 0.94%, 误差随 φ 的增大而减小; 当 $15^\circ < \varphi \leq 40^\circ$ 时, 比本文高 0.03% ~ 4.36%, 误差随 φ 的增大而增大。

表 2 结果还表明, 本文 N_y 和 Martin (2004)^[22] 的 N_y 随着 q 、 φ 的增大而增大, 而其他研究者的 N_y 仅随 φ 的增大而增大, 而与 q 无关。

5.2 完全粗糙基础 ($\lambda = 1$)

某一条形基础的参数 $B = 1$ m, $\gamma = 20$ kN/m³, $c_w = c = 0$, $\delta = \varphi \neq 0$ 及 $q_1 = q_2 = q$, 求解第一类极限承载力问题。由于式 (16) 不满足, 因此 Terzaghi 方程在这里并不是严格地适用而只是一种近似。Martin (2004)^[22]、Bolton 和 Lau (1993)^[16] 和 Chen (1975)^[24] 按式 (27) 计算 N_q , 而 Terzaghi (1943)^[3] 按式 (29) 计算。不同 q 、 φ 值的计算结果如表 3 和图 9 所示, 分析比较如下:

当 $q = 0$ 时, Martin (2004)^[22] 采用滑移线法计算的 Q_{uv} 值比本文低 0.81% ~ 23.21%, 误差随 φ 的增大而增大。Bolton 和 Lau (1993)^[16] 采用滑移线法计算得到的 Q_{uv} 比本文高 8.58% ~ 442.43%, 误差随 φ 的增大而减小。Chen (1975)^[24] 采用上限极限

分析计算的 Q_{uv} 比本文高 31.92% ~ 234.21%, 误差随 φ 的增大而减小。Terzaghi (1943)^[3] 采用极限平衡法计算, 当 $\varphi \leq 30^\circ$ 时, 其 Q_{uv} 比本文高 8.95% ~ 337.45%, 误差随 φ 的增大而减小; 当 $30^\circ < \varphi \leq 40^\circ$ 时, 比本文低 2.92% ~ 9.90%, 误差随 φ 的增大而增大。注意这里 $q/\gamma B$ 值取 10^{-9} 以避免浮点错误。

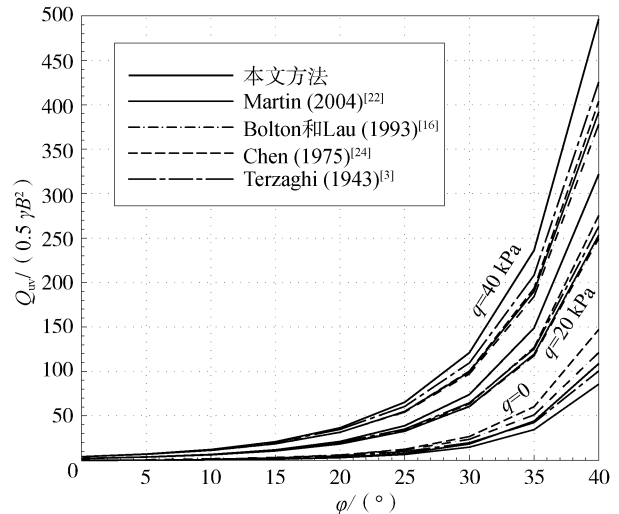


图 9 完全粗糙基础的计算结果

Fig. 9 Calculation results for perfectly rough footings

当 $q = 20$ kPa 时, 按 Martin (2004)^[22]、Bolton 和 Lau (1993)^[16]、Chen (1975)^[24] 和 Terzaghi (1943)^[3] 的方法计算得到的总竖向极限承载力 Q_{uv} 分别比本文低 3.03% ~ 21.59%、5.71% ~ 22.75%、2.86% ~ 14.94% 及 2.81% ~ 18.55%, 误差随 φ 的增大而增大。当 $q = 40$ kPa 时, 分别比本文低 3.77% ~ 21.33%、0.87% ~ 24.13%、4.29% ~ 18.91% 及 0.72% ~ 14.55%, 误差随 φ 的增大而增大。通过比较可以看出, 其它方法低估了完全粗糙基础的极限承载力, 主要因为它们采用了一个更为尖锐的楔形基础。值得指出的是, 虽然其它方法使用的 Terzaghi 方程在这里并不是严格适用, 但由于该方程给出的结果偏于保守, 因此 Terzaghi 方程在实际工程中的应用仍然是安全和有效的。

6 算例

某一条形基础的参数 $B = 2$ m, $q_1 = 40$ kPa, $q_2 = 20$ kPa, $\gamma = 19$ kN/m³, $c = 15$ kPa, $\varphi = 25^\circ$, c_w

表3 完全粗糙基础的结果比较

Tab. 3 Comparison of results for perfectly rough footings

$\varphi/$ ($^{\circ}$)	本文方法		Martin(2004) ^[22]			Bolton 和 Lau(1993) ^[16]			Chen(1975) ^[24]			Terzaghi(1943) ^[3]		
	N_y	Q_{uv}/kN	N_y	Q_{uv}/kN	Error/%	N_y	Q_{uv}/kN	Error/%	N_y	Q_{uv}/kN	Error/%	N_y	Q_{uv}/kN	Error/%
$q=0$														
5	0.114	1.14	0.113	1.13	-0.81	0.62	6.20	442.43	0.382	3.82	234.21	0.50	5.00	337.45
10	0.447	4.47	0.433	4.33	-3.16	1.71	17.10	282.29	1.16	11.60	159.33	1.20	12.00	168.28
15	1.267	12.67	1.181	11.81	-6.76	3.17	31.70	150.28	2.73	27.30	115.54	2.50	25.00	97.38
20	3.183	31.83	2.839	28.39	-10.80	5.97	59.70	87.58	5.87	58.70	84.44	5.00	50.00	57.10
25	7.618	76.18	6.491	64.91	-14.79	11.60	116.00	52.28	12.40	124.00	62.78	9.70	97.00	27.34
30	18.083	180.83	14.754	147.54	-18.41	23.60	236.00	30.51	26.70	267.00	47.66	19.70	197.00	8.95
35	43.677	436.77	34.476	344.76	-21.07	51.00	510.00	16.77	60.20	602.00	37.83	42.40	424.00	-2.92
40	111.435	1114.35	85.566	855.66	-23.21	121.00	1210.00	8.58	147.00	1470.00	31.92	100.40	1004.00	-9.90
$q=20\text{ kPa}$														
5	1.621	36.21	0.376 *	35.11	-3.03	0.62	37.55	3.71	0.382	35.17	-2.86	0.50	37.84	4.49
10	4.516	65.16	1.122 *	60.65	-6.92	1.71	66.53	2.10	1.16	61.03	-6.34	1.20	65.87	1.09
15	9.722	117.22	2.579 *	104.61	-10.76	3.17	110.52	-5.71	2.73	106.12	-9.47	2.50	113.92	-2.81
20	19.187	211.87	5.457 *	182.56	-13.83	5.97	187.69	-11.41	5.87	186.69	-11.89	5.00	198.77	-6.18
25	36.951	389.51	11.326 *	326.50	-16.18	11.60	329.24	-15.47	12.40	337.24	-13.42	9.70	351.41	-9.78
30	72.205	742.05	23.887 *	606.89	-18.21	23.60	604.02	-18.60	26.70	635.02	-14.42	19.70	646.11	-12.93
35	147.066	1490.66	52.651 *	1192.43	-20.01	51.00	1175.92	-21.11	60.20	1267.92	-14.94	42.40	1252.79	-15.96
40	320.843	3228.43	124.75 *	2531.45	-21.59	121.00	2493.90	-22.75	147.00	2753.90	-14.70	100.40	2629.42	-18.55
$q=40\text{ kPa}$														
5	2.951	69.51	0.418 *	66.89	-3.77	0.62	68.91	-0.87	0.382	66.53	-4.29	0.50	70.67	1.68
10	8.061	120.61	1.233 *	111.19	-7.81	1.71	115.96	-3.86	1.16	110.46	-8.42	1.20	119.74	-0.72
15	16.902	209.02	2.814 *	185.78	-11.12	3.17	189.35	-9.41	2.73	184.95	-11.52	2.50	202.85	-2.95
20	32.560	365.60	5.926 *	315.23	-13.78	5.97	315.68	-13.66	5.87	314.68	-13.93	5.00	347.55	-4.94
25	61.424	654.24	12.262 *	549.10	-16.07	11.60	542.49	-17.08	12.40	550.49	-15.86	9.70	605.82	-7.40
30	117.337	1213.37	25.824 *	994.29	-18.06	23.60	972.04	-19.89	26.70	1003.04	-17.33	19.70	1095.23	-9.74
35	233.012	2370.12	56.911 *	1900.95	-19.80	51.00	1841.84	-22.29	60.20	1933.84	-18.41	42.40	2081.59	-12.17
40	493.947	4979.47	134.96 *	3917.45	-21.33	121.00	3777.81	-24.13	147.00	4037.81	-18.91	100.40	4254.83	-14.55

注：* 表示该 N_y 值是基于 Terzaghi 方程由软件 ABC 计算的 Q_{uv} 值进行换算得到的。

=10 kPa 及 $\delta = 10^{\circ}$ ，分别求解第一和第二类问题的地基极限承载力。

1) 第一类问题：差分网格的 β 滑移线总数为 $n = 66$ ，第一条 β 滑移线的结点数为 $m = 86$ ，结点总数为 9 966。优化方法采用黄金分割法，当一维搜索区间缩小到小于 $B \times 10^{-8}$ 时，迭代计算终止。计算结果如下： $\chi = 59.972^{\circ} < 90^{\circ}$ ， OA_1 的宽度 $b^* = 0.580\text{ m}$ ，总竖向极限承载力 $Q_{uv}(b^*) = 1\ 941.150\text{ kN}$ ，其中包括 $Q_{uv1} = 613.439\text{ kN}$ ， $Q_{uv2} = 1\ 327.711\text{ kN}$ ，滑移线场及竖向极限承载力分布如图 10(a)

所示。

2) 第二类问题：其计算结果如下： OA_1 的宽度 $b^* = 1.886\text{ m}$ ，总竖向极限承载力 $Q_{uv}(b^*) = 1\ 246.608\text{ kN}$ ，其中包括 $Q_{uv1} = 1167.603\text{ kN}$ ， $Q_{uv2} = 79.005\text{ kN}$ ，总水平极限承载力 $Q_{uh}(b^*) = 239.811\text{ kN}$ ，滑移线场及竖向极限承载力分布如图 10(b) 所示。由此可见，与第一类问题相比，塑性区的形状、大小差别较大，总竖向极限承载力降低了 35.780%。

3) 工程上也可采用简化方法计算条形浅基础极

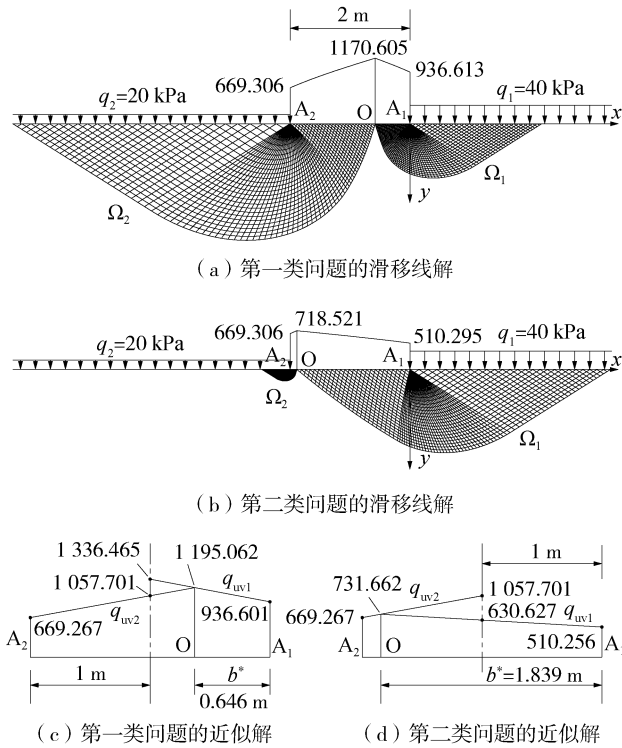


图 10 计算结果

Fig. 10 Calculation results

限承载力, 现以第一类问题为例说明其计算步骤, 如下:

i) 取 $b = B/2$, $q = q_1$, 计算 $\eta_1 = 1.771\ 174$, $\eta_2 = 0.897\ 530$ 和 $\eta_2/\eta_1 = 0.506\ 743$, 根据表 1 通过线性插值可确定竖向承载力系数 $N_{v0} = 47.190$ 和 $N_{v1} = 68.235$, 进而可求得 $q_{uv1}(0) = 936.601\ \text{kPa}$ 和 $q_{uv1}(-b) = 1\ 336.465\ \text{kPa}$ 。

ii) 取 $b = B/2$, $q = q_2$, 按照上述同样的方法可求得 $q_{uv2}(-B) = 669.267\ \text{kPa}$ 和 $q_{uv2}(-b) = 1\ 057.701\ \text{kPa}$ 。

iii) 如图 10(c) 所示, 假定竖向极限承载力 q_{uv1} 和 q_{uv2} 分别呈线性分布, 通过求这两条直线的交点可确定 OA_1 的宽度 $b^* = 0.646\ \text{m}$ 以及点 O 的竖向极限承载力 $q_{uv}(-b^*) = 1\ 195.062\ \text{kPa}$, 进一步可求得总竖向极限承载力 $Q_{uv}(b^*) = 1\ 950.728\ \text{kN}$, 比前面给出的滑移线解略高 0.493%。

4) 采用简化方法同样可求解第二类问题, 如图 10(d) 所示。计算结果如下: $b^* = 1.839\ \text{m}$, $Q_{uv}(b^*) = 1\ 254.689\ \text{kN}$, $Q_{ub}(b^*) = 241.236\ \text{kN}$, 极限承载力近似解分别比相应的精确解大 0.648% 和 0.594%。

7 结论

本研究可以得出以下结论:

1) 根据基础与土之间的相对运动和相互作用, 可将条形浅基础极限承载力问题分为两类; 建立一个以总竖向极限承载力为目标函数的最小值模型, 从而揭示地基极限承载力的内在力学本质, 并提出了精确求解该问题的一般性方法。

2) 塑性破坏机构取决于极限承载力问题的类型和相关参数, 可通过求解最优化问题而自动确定。经典的 Prandtl 机构并不代表无重土地基上完全光滑基础极限承载力问题的塑性破坏机构。

3) 工程上可采用本文提出的简化方法近似计算条形浅基础极限承载力, 既简便易行又精确可靠。

4) 新承载力方程适用于 $q_1 = q_2 = q$ 的第一类问题, 而 Terzaghi 方程仅适用于同时满足 $q_1 = q_2 = q$ 、式(15)及式(16)的第一类问题; Terzaghi 方程是一个精确的理论方程, 可由新承载力方程完全替代; 求得承载力系数 N_v 、 N_γ 、 N_c 及 N_q 的理论精确解, 其中 N_v 、 N_γ 随着 φ 、 δ 、 η_1 及 η_2 的增大而增大, 而 N_c 、 N_q 随着 φ 、 λ 的增大而增大。

5) 对于完全光滑基础, 本文方法得到的总竖向极限承载力与现有方法得到的一致; 对于完全粗糙基础, 两者之间的差异较大但不超过 25%, 而现有方法低估了极限承载力。本文理论解还有待与有限元法计算结果进行比较。

6) 为了便于本文研究成果在实际工程中应用, 编制一本可供工程师使用的关于 N_{v0} 和 N_{v1} 的表格手册, 以及进行各种实验室和现场的试验研究来验证, 有望成为该课题今后研究的主要任务。

附录 1: 证明 Terzaghi 方程在一定条件下与新承载力方程是等价的

如图 6 所示, 对于基础两侧均布荷载相同(即 $q_1 = q_2 = q$)的第一类问题, 当式(22)满足时, 基础边缘的竖向极限承载力 $q_{uv}(0)$ 或 $q_{uv}(-B)$ 可以分解为 cN_c 与 qN_q 之和, 也就是

$$q_{uv}(0) = q_{uv}(-B) = cN_c + qN_q \quad (30)$$

式中: N_c 、 N_q 按式(24)计算。另外, 基础边缘的竖向极限承载力还可表示为

$$q_{uv}(0) = q_{uv}(-B) = \gamma b N_{v0} + q \quad (31)$$

式中: $b = B/2$ 。当同时满足 $q_1 = q_2 = q$ 、式(14)及

式(22)时, 总竖向极限承载力 Q_{uv} 可按以下两种方法计算。一种方法是:

$$\begin{aligned} Q_{uv} &= 2 \times \int_{-\frac{B}{2}}^0 q_{uv1} dx \\ &= 2 \times \int_{-\frac{B}{2}}^0 (\gamma b N_{vM} + q) dx \\ &= 2 \times \int_{-1}^0 \left(\gamma \frac{B}{2} N_{vM} + q \right) d\left(\frac{B}{2} x'\right) \quad (32) \\ &= \frac{1}{2} \gamma B^2 \times \int_{-1}^0 N_{vM} dx' + qB \\ &= \frac{1}{2} \gamma B^2 N_v + qB \end{aligned}$$

式(32)左右两边同时除以 B , 可推导出新承载力方程:

$$\frac{Q_{uv}}{B} = \frac{1}{2} \gamma B N_v + q \quad (33)$$

另一种方法是:

$$\begin{aligned} Q_{uv} &= 2 \times \int_{-\frac{B}{2}}^0 q_{uv1} dx \\ &= 2 \times \int_{-\frac{B}{2}}^0 [q_{uv1} - q_{uv}(0)] dx + q_{uv}(0) B \\ &= 2 \times \int_{-\frac{B}{2}}^0 [(\gamma b N_{vM} + q) - (\gamma b N_{v0} + q)] dx + (c N_c + q N_q) B \\ &= 2 \gamma \frac{B}{2} \times \int_{-1}^0 (N_{vM} - N_{v0}) d\left(\frac{B}{2} x'\right) + (c N_c + q N_q) B \\ &= \frac{1}{2} \gamma B^2 \times \left(\int_{-1}^0 N_{vM} dx' - N_{v0} \right) + c N_c B + q N_q B \\ &= \frac{1}{2} \gamma B^2 \times (N_v - N_{v0}) + c N_c B + q N_q B \\ &= \frac{1}{2} \gamma B^2 N_v + c N_c B + q N_q B \quad (34) \end{aligned}$$

式(34)左右两边同时除以 B , 可得 Terzaghi 方程:

$$\frac{Q_{uv}}{B} = \frac{1}{2} \gamma B N_v + c N_c + q N_q \quad (35)$$

因此, 在满足 $q_1 = q_2 = q$ 、式(14)及式(22)的条件下, Terzaghi 方程是一个严格的理论方程, 并且与本文提出的新承载力方程完全等价。

参考文献:

- [1] PRANDTL L. Über die härte plastischer körper [J]. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1920, 12: 74-85.
- [2] REISSNER H. Zum erdruckproblem (concerning the earth-pressure problem) [C]//BIEZENO C B, BURGERS J M. Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics, Delft, Netherlands, 1924. Delft: [s. n.], 1924: 295-311.
- [3] TERZAGHI K. Theoretical soil mechanics [M]. New York: John Wiley and Sons, 1943.
- [4] MEYERHOF G G. The ultimate bearing capacity of foundations [J]. Géotechnique, 1951, 2(4): 301-332.
- [5] SARMA S K, IOSSIFELIS I S. Seismic bearing capacity factors of shallow strip footings [J]. Géotechnique, 1990, 40(2): 265-273.
- [6] KUMBHOJKAR A S. Numerical evaluation of terzaghi's sN_γ [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1993, 119(3): 598-607.
- [7] DEWAIKAR D M, MOHAPATRA B G. Computation of bearing capacity factor N_γ -PRANDTL'S mechanism [J]. Soils and Foundations, 2003, 43(3): 1-10.
- [8] SILVESTRI V. A limit equilibrium solution for bearing capacity of strip foundations on sand [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, 40(2): 351-361.
- [9] ZHU D Y, LEE C F, LAW K T. Determination of bearing capacity of shallow foundation without using superposition approximation [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, 40(2): 450-459.
- [10] CHOUDHURY D, SUBBA RAO K S. Seismic bearing capacity of shallow strip footings [J]. Geotechnical and Geological Engineering, 2005, 23(4): 403-418.
- [11] TSUCHIDA T, ATHAPATHTHU A M R G. Practical slip circle method of slices for calculation of bearing capacity factors [J]. Soils and Foundations, 2014, 54(6): 1127-1144.
- [12] VAN BAARS S. The inclination and shape factors for the bearing capacity of footings [J]. Soils and Foundations, 2014, 54(5): 985-992.
- [13] CHEN Q, ABU-FARSAKH M. Ultimate bearing capacity analysis of strip footings on reinforced soil foundation [J]. Soils and Foundations, 2015, 55(1): 74-85.
- [14] SOKOLOVSKII V V. Statics of granular media [M]. Oxford, UK: Pergamon Press, 1965.
- [15] DAVIS E H, BOOKER J R. The bearing capacity of strip footings from the standpoint of plasticity theory [C]//Proc. 1st Australia-New Zealand Conf. on Geomech. Melbourne: [s. n.], 1971: 276-282.
- [16] BOLTON M D, LAU C K. Vertical bearing capacity factors for circular and strip footings on Mohr-Coulomb soil [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1993, 30(6): 1024-1033.
- [17] UENO K, MIURA K, KUSAKABE O, et al. Reappraisal of size effect of bearing capacity from plastic solution [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2001, 127(3): 275-281.
- [18] ZHU F, CLARK J I, PHILLIPS R. Scale effect of strip and circular footings resting on dense sand [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2001, 127(7): 613-621.
- [19] KUMAR J, MOHAN RAO V B K. Seismic bearing capacity factors for spread foundations [J]. Géotechnique, 2002, 52(2): 79-88.
- [20] KUMAR J. N_γ for rough strip footing using the method of char-

- acteristics [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, 40(3): 669-674.
- [21] CHENG Y M, AU S K. Solution of the bearing capacity problem by the slip line method [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2005, 42(4): 1232-1241.
- [22] MARTIN C M. User guide for ABC-analysis of bearing capacity V1.0 [R]. OUEL Report No. 2261/03, Oxford University Engineering Laboratory, 2004.
- [23] LAU C K, BOLTON M D. The bearing capacity of footings on granular soils [J]. I: Numerical analysis. Géotechnique, 2011, 61(8): 627-638.
- [24] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity [M]. Amsterdam, the Netherlands: Elsevier, 1975.
- [25] MICHALOWSKI R L. An estimate of the influence of soil weight on bearing capacity using limit analysis [J]. Soils and Foundations, 1997, 37(4): 57-64.
- [26] SOUBRA A H. Upper-bound solutions for bearing capacity of foundations [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1999, 125(1): 59-68.
- [27] ZHU D Y. The least upper-bound solution for the bearing capacity factor N_γ [J]. Soils and Foundations, 2000, 40(1): 123-129.
- [28] WANG Y J, YIN J H, CHEN Z Y. Calculation of bearing capacity of a strip footing using an upper bound method [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2001, 25(8): 841-851.
- [29] KUMAR J. Effect of footing-soil interface friction on bearing capacity factor N_γ [J]. Géotechnique, 2004, 54(10): 677-680.
- [30] SLOAN S W. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1989, 13(3): 263-282.
- [31] UKRITCHON B, WHITTLE A J, KLANGVIJIT C. Calculations of bearing capacity factor N_γ using numerical limit analyses [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2003, 129(6): 468-474.
- [32] HJIAJ M, LYAMIN A V, SLOAN S W. Numerical limit analysis solutions for the bearing capacity factor N_γ [J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(5-6): 1681-1704.
- [33] LYAMIN A V, SALGADO R, SLOAN S W, et al. Two- and three-dimensional bearing capacity of footings in sand [J]. Géotechnique, 2007, 57(8): 647-662.
- [34] GRIFFITHS D V. Computation of bearing capacity factors using finite elements [J]. Géotechnique, 1982, 32(3): 195-202.
- [35] MANOHARAN N, DASGUPTA S P. Bearing capacity of surface footings by finite elements [J]. Computers and Structures, 1995, 54(4): 563-586.
- [36] FRYDMAN S, BURD H J. Numerical studies of bearing capacity factor N_γ [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1997, 123(1): 20-29.
- [37] YIN J H, WANG Y J, SELVADURAI A P S. Influence of non-association on bearing capacity of a strip footing [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2001, 127(11): 985-989.
- [38] LOUKIDIS D, SALGADO R. Bearing capacity of strip and circular footings in sand using finite elements [J]. Computers and Geotechnics, 2009, 36(5): 871-879.
- [39] NGUYEN D L, OHTSUKA S, HOSHINA T, et al. Discussion on size effect of footing in ultimate bearing capacity of sandy soil using rigidplastic finite element method [J]. Soils and Foundations, 2016, 56(1): 93-103.
- [40] LAU C K, BOLTON M D. The bearing capacity of footings on granular soils [J]. II: Experimental evidence. Géotechnique, 2011, 61(8): 639-650.
- [41] MARTIN C M. Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics [C]//Proc. 11th Int. Conf. on Computer Methods and Advances in Geomechanics. Turin: [s. n.], 2005: 441-450.
- [42] 彭明祥. 挡土墙被动土压力的滑移线解 [J]. 岩土工程学报, 2011, 33(3): 460-469.
- PENG M X. Slip-line solution to passive earth pressure on retaining walls [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(3): 460-469.
- [43] 彭明祥. 滑移线法求解挡土墙主动土压力 [J]. 南方能源建设, 2018, 5(1): 1-13.
- PENG M X. Active earth pressure on retaining walls using Slip-line method [J]. Southern Energy Construction, 2018, 5(1): 1-13.
- [44] PENG M X, CHEN J. Slip-line solution to active earth pressure on retaining walls [J]. Géotechnique, 2013, 63(12): 1008-1019.
- [45] MEYERHOF G G. The bearing capacity of foundations under eccentric and inclined loads [C]//[s. n.]. Proceedings of the Third International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Zurich, 1953. Zurich: [s. n.], 1953: 440-445.
- [46] HILL R. The mathematical theory of plasticity [M]. Oxford, UK: Oxford University Press, 1950.
- [47] SIEFFERT J G, BAY-GRESS CH. Comparison of european bearing capacity calculation methods for shallow foundations [J]. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Geotechnical Engineering, 2000, 143(2): 65-74.
- [48] DIAZ-SEGURA E G. Assessment of the range of variation of N_γ from 60 estimation methods for footings on sand [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2013, 50(7): 793-800.
- [49] MOTRA H B, STUTZ H, WUTTKE F. Quality assessment of soil bearing capacity factor models of shallow foundations [J]. Soils and Foundations, 2016, 56(2): 265-276.

作者简介:



PENG M X

彭明祥(通信作者)

1964-, 男, 广东化州人, 教授级高级工程师, 注册岩土工程师, 注册港口与航道工程师, 硕士, 主要从事水工结构和岩土力学与工程的研究工作 (e-mail) pengmingxiang1964@qq.com。